V-48 (33 min) 5-Enero 2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Diagramas de Penrose (2/2) en Agujeros Negros** **Esp-Tmp Kruskal**

Recordamos métrica con **coordenadas Kruskal adimensionales**:

$$\boxed{ds^2 = \frac{4}{r}e^{-r}\left[-dT^2 + dX^2\right] + r^2 d\Omega^2} \quad \textbf{(Conf. Plana)}$$

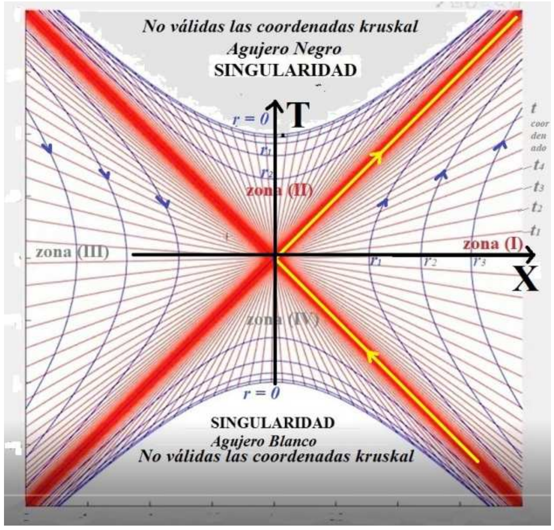
[C.P]

Antiguas coordenada *r y t* se relaciona con las nuevas *(T, X)* por:

$$\boxed{X^2 - T^2 = (r-1)e^r} \quad \text{y} \quad \frac{T}{X} \text{ ó } \frac{X}{T} = \tanh(t/2) \quad \text{(según zona)}$$

El Horizonte de eventos (*r = 1*) son líneas: $T = \pm X$

Límite de Singularidad (*r = 0*) son líneas: $T = \pm\sqrt{X^2+1}$



Las coordenadas de Kruskal (T, X) son válidas en las cuatro zonas:
- Fuera de H.Eventos (zonas I y III)
- Entre H.Eventos y singularidad (zonas II y IV)

Las coordenadas *(T, X)* no son válidas en las singularidades

Para conseguir unDiagrama de Penrose seguimos los mismos pasos que en V-47:

1) Hacemos cambio variables *(T,X) → (q,p)* para que el Esp-Tmp gire y las geodesícas-luz sean paralelas a ejes:

$q = T - X \rightarrow dq = dT - dX$

$p = T + X \rightarrow dp = dT + dX$

Solo coord. NO compactas (infinitas)

$$ds^2 = \frac{4}{r}e^{-r}[-dq \cdot dp] \quad \textbf{[No C.P]}$$

El antiguo eje **T** *(X = 0)* → recta $q = +p$

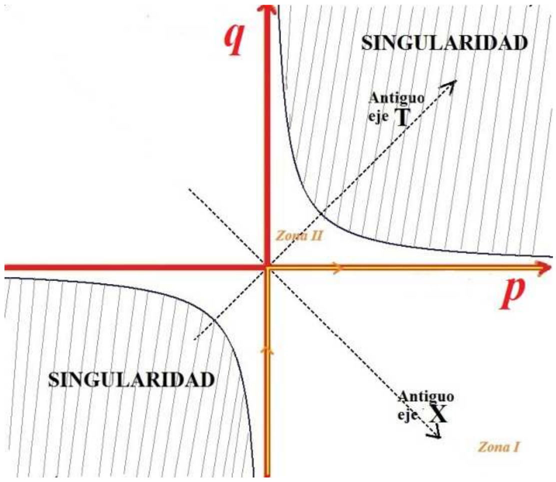
El antiguo eje **X** *(T = 0)* → recta $q = -p$

El sentido se asigna viendo cómo varía *q* y *p* al aumentar *T* ó *X*

Con ese cambio de variables giran.los nuevos ejes y coinciden con Horizonte de Eventos.

Límite de Singularidad se convierte en : $p = \frac{1}{q}$

La zona rayada representa las singularidades (agujero neegro y blaco) donde no son válidas las coordenadas *(q,p)*



2) Otro cambio de varaibles *(q, p) → (V, U)* para que las coordenadas no compactas (infinitas) se sustituyan por otras *(V,U)* (finitas) y todo el Esp-Tmp quede recluido a zona finita. Utilizaremos, igual que en V-47, una "función compresora", que, además de compactar las variables, transforme el límite de Singularidad en recta

$V = \arctan q \rightarrow dV = \frac{1}{1+q^2}dq \rightarrow dq = (1+\tan^2 V)dV$

$U = \arctan p \rightarrow dU = \frac{1}{1+p^2}dp \rightarrow dp = (1+\tan^2 U)dU$

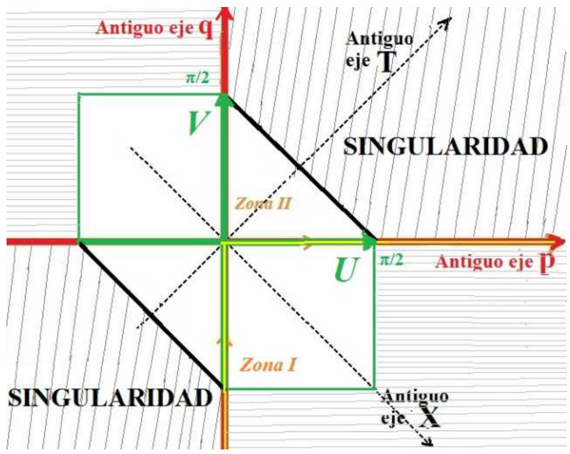
$$ds^2 = \frac{4}{r}e^{-r}(1+q^2)(1+p^2)\cdot[-dV \cdot dU] \quad \textbf{[No C.P]}$$

El cambio limita los valores de *(V, U)* (líneas verdes de gráfica):

q = +∞ → *V*= arctan(∞) = π/2 ; q= −∞ → *V*= arctan(−∞) = −π/2

p = +∞ → *U*= arctan(∞) = π/2 ; p= −∞ → *U*= arctan(−∞) = −π/2

Además transforma el Límite de la Singularidad $p = \frac{1}{q}$ en líneas rectas de ecuación **V+U = ±π/2** . (Comprobación, en video al principio)*



Concluimos: Rango de validez de coordenadas *V* y *U* (todo el Esp-Tiem) es limitado a zona sin rayar en la gráfica

(*) Comprobación: $\arctan q + \arctan p = \pm\frac{\pi}{2}$ Derivando respecto *p* ha de cumplirse : $\frac{1}{1+q^2}\cdot\frac{dq}{dp} + \frac{1}{1+p^2} = 0$

Si suponemos que $q = \frac{1}{p}$ y sustituimos: $\frac{p^2}{1+p^2}\left(-\frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{1+p^2} = -\frac{1}{1+p^2} + \frac{1}{1+p^2} = 0$ Se cumple, luego la suposición es válida (podría haber otros cambios de variables también válidos)

3) Hacemos cambio variable *(V, U)* → *(𝜏, R)* con objeto de volver a girar el Esp-Tiemp y Luz forme 45º. (No son tiempo propio ni radio, pero tienen que ver con el tiempo y el espacio)

$$d\tau^2 - dR^2 = \cdots = 4 \cdot dU \cdot dV \;\; \rightarrow \;\; -dV \cdot dU = \frac{1}{4}\left[-d\tau^2 + dR^2\right]$$

$\boldsymbol{\tau = U + V}$ → $d\tau = dU + dV$

$\boldsymbol{R = U - V}$ → $dR = dU - dV$

$$\boldsymbol{ds^2} = \frac{1}{r} e^{-r}(1+q^2)(1+p^2) \cdot \left[-\boldsymbol{d\tau^2} + \boldsymbol{dR^2}\right] \quad \text{[Conf. Plana]}$$

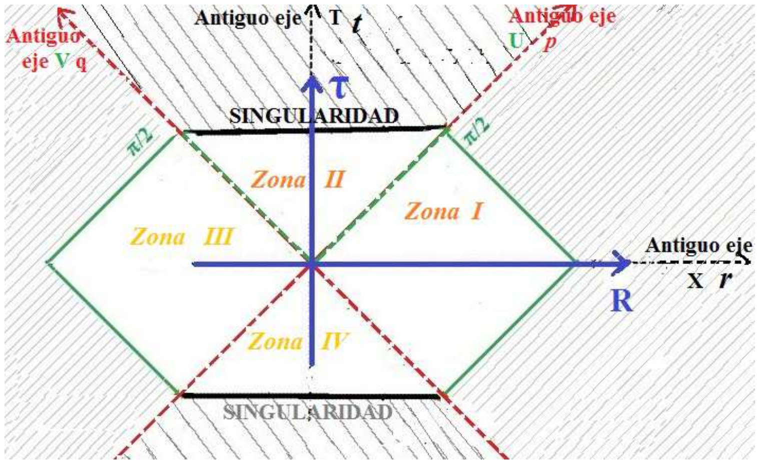
El antiguo eje **V** (U = 0) → recta $\tau = -R$

El antiguo eje **U** (V= 0) → recta $\tau = +R$

El sentido se asigna viendo cómo varía **V** y **U** al aumentar *𝜏 ó R*

Con este cambio de variable los nuevos ejes *(𝜏, R)* ocupan la posición de los antiguos de Kruskal *(T, X)* y de Swarzschild (t, r).

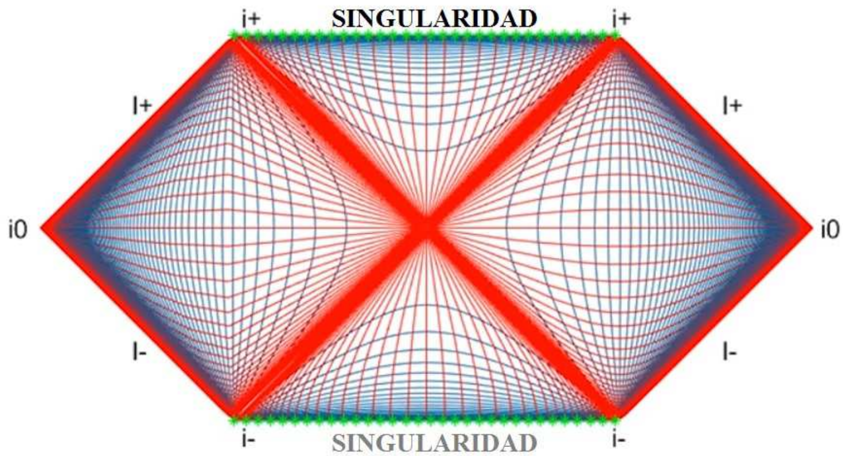
Las líneas de Luz vuelven a formar 45º con los ejes.



El rango de validez de *(𝜏, R)* es la zona no rayada (aunque las zonas III y IV son artificios matemáticos)

El Diagrama de Penrose para el Esp-Tiemp de Kruskal

Con un programa informático Javier García ha mostrado el aspecto que tienen las líneas de valores constantes de las coordenadas originales de Schwarzschild ***(t , r)***



I+ Light-like future (línea donde llega todo rayo de luz)

i+ Time-like future (punto de tiempo infinito, donde llega toda partícula)

i 0 Space-like infinity (punto donde r es infinito)

Quizás queda más claro si dibujamos el Diagrama de Penrose únicamente de las zonas (I y II), que realmente existen, pues las otras son artificios matemáticas